



Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Tengah ($M(G)$) dari Graf Ulat ($C_{m,2}$)

Fuji Fauzia Kiayi¹, Sumarno Ismail³, Nisky Imansyah Yahya^{1*}, Lailany Yahya¹,
Salmun K. Nasib²

¹Program Studi Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96554, Indonesia

²Program Studi Statistika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96554, Indonesia

³Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96554, Indonesia

Info Artikel

*Penulis Korespondensi.
Email: nisky@ung.ac.id

Submit: 12 November 2024
Direvisi: 15 Februari 2025
Disetujui: 22 Februari 2025



Under the licence
CC BY-NC-SA 4.0

Diterbitkan oleh:



Copyright ©2025 by Author(s)

Abstrak

Pewarnaan sisi dari sebuah graf (G) dikatakan terhubung pelangi jika graf tersebut saling terhubung satu sama lain dan terdapat jalur pelangi yang menjadi penghubung antara setiap dua titik. Bilangan terhubung pelangi dari graf (G) yang disimbolkan dengan $rc(G)$, adalah jumlah warna paling sedikit yang diperlukan agar graf (G) menjadi terhubung pelangi. Pada penelitian ini mengkaji tentang bilangan terhubung pelangi pada graf tengah ($M(G)$) dari graf ulat. Graf tengah merupakan hasil modifikasi dari sebuah graf G , yang dinotasikan dengan $M(G)$. Graf tengah dari sebuah graf G dapat digambarkan sebagai sebuah graf perpotongan antara sekumpulan titik dan sekumpulan sisi. Himpunan titik pada graf tengah $M(G)$ terdiri dari kumpulan titik-titik dan sisi-sisi dari graf G . Dua titik disebut saling bertetangga jika dan hanya jika keduanya saling bersebelahan di dalam graf G atau salah satu dari keduanya adalah sebuah titik dan yang lainnya adalah sisi-sisi yang bersebelahan dengannya. Graf ulat yang dinotasikan dengan $C_{m,n}$ adalah sebuah pohon yang akan menjadi lintasan jika semua titik daunnya dihapus. Hasil dari penelitian ini menunjukkan teorema bilangan terhubung pelangi untuk graf tengah dari graf ulat $rc(M(C_{m,2})) = 3m$ untuk $m \geq 2$.

Kata Kunci: Bilangan Terhubung Pelangi; Graf Tengah; Graf Ulat.

Abstract

Edge coloring of a graph (G) is considered rainbow connected if the graph is connected and a rainbow path exists for every pair of points. The rainbow connection number of a graph, denoted as $rc(G)$, represents the smallest number of colors required to make the graph is rainbow connected. This study examines the rainbow connection number of the middle graph ($M(G)$) of a caterpillar graph. The middle graph is a modified result of a graph G , denoted as $M(G)$. It is described as a graph constructed from the intersection of a set of points and edges. The set of points in the middle graph $M(G)$ consists of the combination of points and edges of the graph G . Two points are considered adjacent if only they are connected in G , or if one point corresponds to a point and the other corresponds to an edge adjacent to it. A caterpillar graph denoted by $C_{m,n}$ is a tree that will be a path if all the leaf points are deleted. The results of this research show the rainbow-connected number theorem for the middle graph of the caterpillar graph $rc(M(C_{m,2})) = 3m$ for $m \geq 2$.

Keywords: Rainbow Connection Number; Middle Graph; Caterpillar Graph.

1. Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan terus berlanjut terutama didukung dengan adanya kemajuan teknologi, salah satunya adalah ilmu matematika. Ilmu matematika memiliki peran penting dalam menyelesaikan masalah-masalah yang ada pada kehidupan manusia salah satunya dengan teori graf

[1]. Teori graf memiliki penerapan yang luas pada bidang keilmuan dengan merepresentasikan masalah menggunakan titik dan sisi ke dalam sebuah graf [2].

Sejarah teori graf berawal dari masalah jembatan Königsberg pada tahun 1736. Leonhard Euler seorang ahli matematika asal Swiss memecahkan masalah ini dengan memodelkannya sebagai graf, di mana daratan dinotasikan sebagai titik dan jembatan sebagai garis [3]. Secara sederhana graf adalah himpunan titik yang terhubung oleh garis atau sisi yang digunakan untuk merepresentasikan keterhubungan antar objek yang dilambangkan dengan $(G(V,E))$ dimana V menunjukkan himpunan titik, sedangkan E melambangkan himpunan sisi.

Graf memiliki berbagai variasi jenis dan bentuk, salah satunya adalah graf ulat. Graf ulat sendiri merupakan graf pohon yang akan membentuk lintasan apabila semua titik-titik daunnya dihapus. Setiap titik daun pada graf ulat memiliki jarak 1 dari titik internal lintasan dan dinotasikan dengan $C_{m,n}$ [4]. Penelitian mengenai graf ulat telah dilakukan sebelumnya oleh [5] yang mengkaji tentang bilangan kromatik lokasi dari graf tersebut. Selain memiliki jenis dan bentuk yang beragam, teori graf juga memiliki banyak konsep, salah satunya yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan proses pemetaan yang mengaitkan elemen seperti setiap titik atau sisi dalam graf ke bilangan bulat tak negatif yang disebut sebagai label [6]. Jenis pelabelan graf dikelompokkan menjadi tiga macam yaitu pelabelan titik yang hanya memberi label pada titik, pelabelan sisi yang hanya memberi label pada sisi, dan pelabelan total yang memberi label pada titik dan sisi [7]. Terdapat sebuah kasus khusus pada pelabelan yaitu pewarnaan graf.

Pewarnaan pada graf G adalah proses pemberian warna terhadap elemen-elemen graf seperti titik, sisi, atau wilayah di graf G yang dilakukan sedemikian rupa sehingga tidak terdapat warna yang sama pada setiap elemen graf yang berdekatan. Dalam konteks pewarnaan graf, ada tiga macam jenis pewarnaan, yakni pewarnaan titik, sisi, dan juga wilayah. Konsep pewarnaan graf terus mengalami perkembangan salah satunya pewarnaan pelangi yang pertama kali diperkenalkan oleh [8]. Pewarnaan pelangi merupakan salah satu konsep keterhubungan yang hingga saat ini terus dikaji oleh para peneliti [9]. Pewarnaan pelangi dapat diterapkan dalam menentukan bilangan terhubung pelangi. Suatu pewarnaan sisi graf G merupakan terhubung pelangi apabila graf tersebut saling terhubung serta terdapat suatu lintasan pelangi yang menghubungkan setiap dua titiknya. Suatu lintasan disebut pelangi jika dua sisi lintasan pada graf G tidak mempunyai warna yang sama [10]. Bilangan terhubung pelangi dari graf G , dilambangkan dengan $(rc(G))$, merupakan jumlah minimum warna yang diperlukan agar graf G menjadi terhubung pelangi [8]. Penelitian yang membahas penentuan bilangan terhubung pelangi telah dilakukan oleh [11] pada graf planter (R_n) dan graf gurita (O_n). Selanjutnya, [12] telah melakukan penelitian tentang pewarnaan pelangi dari tiga kelas graf baru yaitu graf tunjung (Tj_n), graf sandat (St_n), dan graf jempiring (J_n). Penelitian lain dilakukan oleh [13] yang mengkaji tentang penentuan bilangan terhubung pelangi pada graf salju (Sn_m).

Penelitian mengenai bilangan terhubung pelangi kemudian mengalami perkembangan salah satunya yaitu penentuan bilangan terhubung pelangi $(rc(G))$ dari graf tengah ($M(G)$) yang merupakan salah satu bentuk pengembangan graf G . Graf tengah diperkenalkan oleh [14]. Graf tengah dari sebuah graf G dapat dijelaskan sebagai graf perpotongan antara himpunan titik dan himpunan sisi yang dinotasikan dengan $(M(G))$. Himpunan titik memuat gabungan titik-titik dan sisi-sisi graf G . Dua titik dianggap bersebelahan jika dan hanya jika keduanya saling bersebelahan dalam graf G atau salah satunya merupakan titik dan yang lainnya adalah sisi yang bersebelahan dengannya [15].

Penelitian mengenai penentuan bilangan terhubung pelangi dari graf tengah pada sebuah graf telah dilakukan oleh [16] yang membahas tentang bilangan terhubung pelangi dari graf garis, graf tengah, dan graf total pada graf sunlet (S_n). Kemudian dikembangkan oleh [17] yang mengkaji tentang bilangan terhubung pelangi kuat dari graf garis, graf tengah, dan graf total pada graf sunlet (S_n). Penelitian lain dilakukan oleh [18] yang membahas tentang bilangan terhubung pelangi total pada graf kelabang (C_n) dari graf garis, graf persegi, dan graf tengah. Selain itu, [19] melakukan penelitian yang membahas tentang penentuan bilangan terhubung pelangi pada graf *cocktail party*

$(K_{n \times 2})$ serta bilangan terhubung pelangi pada graf garis dan graf tengah dari graf roda (W_n) . Berdasarkan beberapa penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk mengkaji masalah tentang penentuan bilangan terhubung pelangi pada graf tengah $(M(G))$ yang merupakan graf baru hasil modifikasi dari graf ulat $(C_{m,n})$.

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur (*library research*) yaitu mengkaji sumber dari jurnal ilmiah, artikel, buku, *textbook* dan referensi lainnya yang terkait dengan bilangan terhubung pelangi dan graf tengah dengan tujuan memperoleh informasi dan metode yang akan digunakan dalam pembahasan masalah terkait. Adapun graf yang dipakai adalah salah satu jenis graf pohon yaitu graf ulat $(C_{m,2})$ dimana m adalah bilangan bulat dengan $m \geq 2$ yang dikembangkan menjadi graf baru yaitu graf tengah $(M(G))$. Berikut beberapa tahapan yang dilakukan pada penelitian ini:

- Menggambar graf tengah $(M(G))$ dari graf ulat $(C_{m,2})$
- Menentukan dan memperoleh pola bilangan terhubung pelangi $(rc(G))$ pada graf yang diperoleh dari gambar di tahap pertama
- Melakukan pembuktian teorema bilangan terhubung pelangi $(rc(G))$ pada hasil graf yang diperoleh sebelumnya
- Merumuskan kesimpulan

Berikut adalah teorema bilangan terhubung pelangi yang didasarkan pada penelitian Chartrand [8]:

Teorema 1. Misalkan G adalah sebarang graf dan $diam(G)$ merupakan diameter dari graf G , berlaku

$$rc(G) \geq diam(G)$$

Proposisi 1. Misalkan G adalah graf terhubung nontrivial dengan ukuran m , maka $rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah pohon.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada pembahasan, dituliskan hasil-hasil apa saja yang diperoleh dalam penelitian. Dibahas dengan uraian yang komprehensif namun ringkas dan padu.

3.1 Graf Tengah $M(G)$ dari Graf Ulat $(C_{m,2})$

Definisi 1. Misalkan m adalah bilangan bulat dengan $m \geq 2$. $M(C_{m,2})$ merupakan graf yang dihasilkan melalui pembentukan graf tengah dari graf ulat $(C_{m,2})$. Maka, graf $M(C_{m,2})$ didefinisikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{x'_i | i \in [1, m-1]\} \cup \{x_i | i \in [1, m]\} \cup \{y'_j | j \in [1, 4]\} \cup \{y_j | j \in [1, 4]\} \cup \\ &\quad \{y'_{i,j} | i \in [1, m-2], j = i+1\} \cup \{y'_{j,i} | i \in [1, m-2], j = i+1\} \cup \\ &\quad \{y_{i,j} | i \in [1, m-2], j = i+1\} \cup \{y_{j,i} | i \in [1, m-2], j = i+1\} \\ E(G) &= \{x_i x'_i | i \in [1, m-2]\} \cup \{x'_i x_j | i \in [1, m], j = i+1\} \cup \{x'_i x'_j | i \in [1, m-1], j = i+1\} \cup \\ &\quad \{x_1 y'_i | i \in [1, 2]\} \cup \{x'_1 y'_i | i \in [1, 2]\} \cup \{x_m y'_i | i \in [3, 4]\} \cup \{x'_{m-1} y'_i | i \in [3, 4]\} \cup \{y'_i y'_{i+1} | i = 1, 3\} \cup \\ &\quad \{y'_i y_i | i \in [1, 4]\} \cup \{x'_i y'_{i,j} | i \in [1, m-2], j = i+1\} \cup \{x'_i y'_{j,i} | i \in [1, m-2], j = i+1\} \cup \\ &\quad \{x'_j y'_{i,j} | i = j-1, j \in [2, m-1]\} \cup \{x'_j y'_{j,i} | i = j-1, j \in [2, m-1]\} \cup \\ &\quad \{x_j y'_{j,i} | i = j-1, j \in [2, m-1]\} \cup \{y'_{i,j} y'_{j,i} | i \in [1, m-2], j = i+1\} \cup \\ &\quad \{y'_{j,i} y_{j,i} | i \in [1, m-2], j = i+1\}. \end{aligned}$$

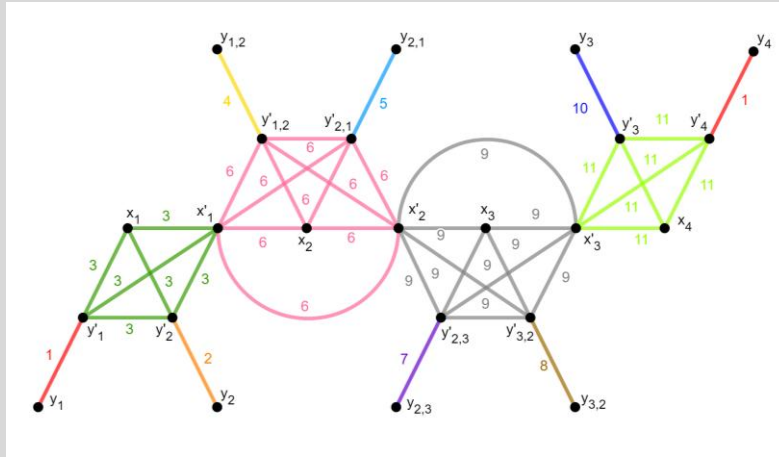
3.2 Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf $M(C_{m,2})$

Teorema 2. Misalkan m merupakan bilangan bulat dengan $m \geq 2$ dan $G \cong M(C_{m,2})$, maka

$$rc(G) = 3m.$$

Bukti. Berdasarkan teorema yang dikemukakan oleh Chartrand, diketahui bahwa $rc(G) \geq diam(G)$. Apabila $rc(G) = diam(G)$ cukup ditunjukkan terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, rc(G)\}$. Sedangkan jika $rc(G) > diam(G)$ perlu dibuktikan dengan kontradiksi. Oleh karena itu, Teorema 2 perlu dibuktikan dengan kontradiksi karena $rc(G) > diam(G)$.

Berdasarkan Gambar 1 terdapat *pendant* di sisi y'_i, y_i dan $y'_{i,j}, y_{i,j}$ serta path dari titik $y'_i - y_j$ sehingga untuk membuat graf tersebut terhubung pelangi dengan warna paling minimum maka semua sisi *pendant* haruslah diberi warna yang berbeda sebanyak $2m$ dan untuk semua sisi pada *path* diberi warna sebanyak m . Maka untuk membuat graf terhubung pelangi dengan warna paling minimum haruslah diberi warna sebanyak $3m$. Misalkan $rc(M(C_{m,2})) = 3m$ untuk $m \geq 2$, selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $rc(M(C_{m,2})) \neq 3m - 1$. Andaikan $rc(M(C_{m,2})) = 3m - 1$, maka terdapat c warna yang merupakan suatu pewarnaan pelangi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3m - 1\}$.

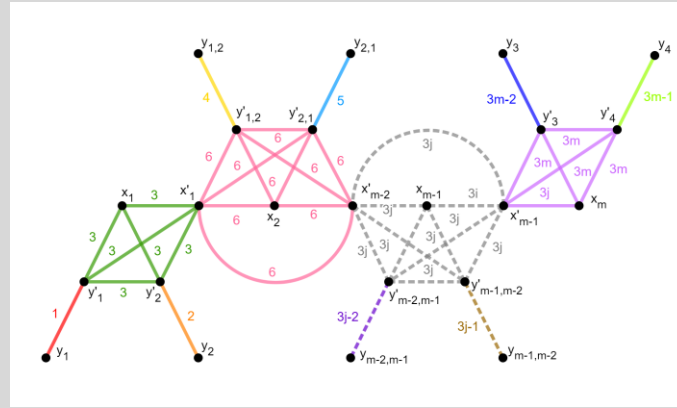


Gambar 1. Pewarnaan Pelangi $M(C_{4,2})$ dengan 11 warna

Asumsikan bahwa *path* haruslah diberi warna yang berbeda sebanyak m . Kemudian perhatikan apabila sisi *pendant* diberi warna $1, 2, 3, \dots, 2m - 1$ akibatnya akan terdapat sisi *pendant* yang sama warna dengan sisi *pendant* yang lain yang menyebabkan lintasan $y_i - y_j, y_i - y_{i,j}$ tidak pelangi. Karena graf $M(C_{m,2})$ tidak dapat diwarnai dengan $3m - 1$ maka pengandaian salah, haruslah graf G diwarnai dengan $3m$ warna sehingga $rc(M(C_{m,2})) = 3m$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rc(M(C_{m,2})) = 3m$. Tanpa mengurangi keumuman, didefinisikan pewarnaan pelangi dari graf $M(C_{m,2})$ sebagai berikut:

$c(x_1 y'_j)$	$= c(x'_1 y'_j) = 3$	$j = [1, 2]$
$c(x_j y'_{j,i})$	$= c(x'_i y'_{j,i}) = c(x'_i y'_{j,i}) = c(x_j y'_{j,i}) = 3j$	$i \in [1, m - 2], j = i + 1$
$c(x'_i x'_j)$	$= c(x'_j y'_{j,i}) = c(x'_j y'_{j,i}) = c(y'_{i,j} y'_{j,i}) = 3j$	$i \in [1, m - 2], j = i + 1$
$c(x'_i x_j)$	$= 3j$	$i \in [1, m - 1], j = i + 1$
$c(x_i x'_i)$	$= 3i$	$i \in [1, m - 1]$
$c(y'_j y'_{j+1})$	$= 3$	$j = 1$
$c(y'_j y_j)$	$= j$	$j = [1, 2]$
$c(y'_{i,j} y_{i,j})$	$= 3j - 2$	$i \in [1, m - 2], j = i + 1$
$c(y'_{j,i} y_{j,i})$	$= 3j - 1$	$i \in [1, m - 2], j = i + 1$
$c(y'_j y_j)$	$= 3m - 2$	$j = 3$
$c(y'_j y_j)$	$= 3m - 1$	$j = 4$
$c(x_i y'_j)$	$= 3m$	$i = m, j = [3, 4]$
$c(x'_i y'_j)$	$= 3m$	$i = m - 1, j = [3, 4]$
$c(y'_j y'_{j+1})$	$= 3m$	$j = 3$

Berikut merupakan ilustrasi pewarnaan pelangi pada graf $M(C_{m,2})$ dengan ≥ 2 .



Gambar 2. Pewarnaan Pelangi $M(C_{m,2})$

Selanjutnya, untuk setiap pasangan $u, v \in G$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c pada graf tengah dari graf ulat $M(C_{m,2})$ yang diuraikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Lintasan Pelangi Graf $M(C_{m,2})$ dengan $m \geq 2$

No	u	v	Kondisi	Lintasan Pelangi
1.	x'_i	x'_j	$i = [1, m - 3], j = [i + 2, m - 1]$	$x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_j$
2.	x_i	x_j	$i = [1, m - 1], j = [i + 1, m]$	$x_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{j-1}, x_j$
3.	x_i	x'_j	$i = [1, m - 2], j = [i + 1, m - 1]$	$x_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_j$
	x'_i	x_j	$i = [1, m - 2], j = [i + 2, m]$	$x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{j-1}, x_j$
4.	y'_i	y'_j	$i = 1, j = [3, 4]$	$y'_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{m-1}, y'_j$
			$i = 2, j = [3, 4]$	$y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{m-1}, y'_j$
5.	y_i	y_j	$i = 1, j = [3, 4]$	$y_i, y'_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{m-1}, y'_j, y_j$
			$i = 2, j = [3, 4]$	$y_i, y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{m-1}, y'_j, y_j$
6.	y_i	y'_j	$i = 1, j = [3, 4]$	$y_i, y'_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{m-1}, y'_j$
			$i = 2, j = [3, 4]$	$y_i, y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{m-1}, y'_j$
	y'_i	y_j	$i = 1, j = [3, 4]$	$y'_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{m-1}, y'_j, y_j$
			$i = 2, j = [3, 4]$	$y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{m-1}, y'_j, y_j$
7.	x'_i	y'_j	$i = [1, m - 2], j = [3, 4]$	$x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, y'_j$
	y'_i	x'_j	$i = 1, j = [i + 1, m - 1]$	$y'_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_j$
			$i = 2, j = [i, m - 1]$	$y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j$
8.	x_i	y_j	$i = [1, m - 1], j = [3, 4]$	$x_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{m-1}, y'_j, y_j$
			$i = m, j = [3, 4]$	x_i, y'_j, y_j
	y_i	x_j	$i = [1, 2], j = 1$	y_i, y'_i, x_j
			$i = 1, j = [i + 1, m]$	$y_i, y'_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x_j$
			$i = 2, j = [i, m]$	$y_i, y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{j-1}, x_j$
9.	x_i	y'_j	$i = [1, m - 1], j = [3, 4]$	$x_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, y'_j$
	y'_i	x_j	$i = 1, j = [i + 1, m]$	$y'_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{j-1}, x_j$
			$i = 2, j = [i, m]$	$y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_{j-1}, x_j$
10.	x'_i	y_j	$i = [1, m - 1], j = [3, 4]$	$x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, y'_j, y_j$
	y_i	x'_j	$i = 1, j = [i, m - 1]$	$y_i, y'_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_j$
			$i = 2, j = [i - 1, m - 1]$	$y_i, y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_j$
11.	x'_i	$y'_{j,k}$	$i = [1, m - 3], j = [i + 1, m - 2],$	$x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_j, y'_{j,k}$

No	u	v	Kondisi	Lintasan Pelangi
			$k = j + 1$	
			$i = [1, m - 3], j = [i + 2, m - 1],$	$x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_k, y'_{j,k}$
	$y'_{i,k}$	x'_j	$k = j - 1$	
			$i = [1, m - 3], j = [i + 2, m - 1],$	$y'_{i,k}, x'_k, x'_{k+1}, \dots, x'_j$
			$k = i + 1$	
			$i = [2, m - 2], j = [i + 1, m - 1],$	$y'_{i,k}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j$
			$k = i - 1$	
12.	x_i	$y_{j,k}$	$i = [1, m - 2], j = [i, m - 2],$	$x_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_j, y'_{j,k}, y_{j,k}$
			$k = j + 1$	
			$i = [1, m - 2], j = [i + 1, m - 1],$	$x_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_k, y'_{j,k}, y_{j,k}$
			$k = j - 1$	
	$y_{i,k}$	x_j	$i = [1, m - 2], j = [i + 1, m],$	$y_{i,k}, y'_{i,k}, x'_k, x'_{k+1}, \dots, x'_{j-1}, x_j$
			$k = i + 1$	
			$i = [2, m - 1], j = [i, m],$	$y_{i,k}, y'_{i,k}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{j-1}, x_j$
			$k = i - 1$	
13.	x_i	$y'_{j,k}$	$i = [1, m - 2], j = [i, m - 2],$	$x_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_j, y'_{j,k}$
			$k = j + 1$	
			$i = [1, m - 2], j = [i + 1, m - 1],$	$x_i, x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_k, y'_{j,k}$
			$k = j - 1$	
	$y'_{i,k}$	x_j	$i = [1, m - 2], j = [i + 2, m],$	$y'_{i,k}, x'_k, x'_{k+1}, \dots, x'_{j-1}, x_j$
			$k = i + 1$	
			$i = [2, m - 1], j = [i + 1, m],$	$y'_{i,k}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{j-1}, x_j$
			$k = i - 1$	
14.	x'_i	$y_{j,k}$	$i = [1, m - 2], j = [i, m - 2],$	$x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_j, y'_{j,k}, y_{j,k}$
			$k = j + 1$	
			$i = [1, m - 2], j = [i + 1, m - 1],$	$x'_i, x'_{i+1}, x'_{i+2}, \dots, x'_k, y'_{j,k}, y_{j,k}$
			$k = j - 1$	
	$y_{i,k}$	x'_j	$i = [1, m - 2], j = [i + 1, m - 1],$	$y_{i,k}, y'_{i,k}, x'_k, x'_{k+1}, \dots, x'_j$
			$k = i + 1$	
			$i = [2, m - 1], j = [i, m - 1],$	$y_{i,k}, y'_{i,k}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j$
			$k = i - 1$	
15.	y'_i	$y'_{j,k}$	$i = 1, j = [i, m - 2],$	$y'_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j, y'_{j,k}$
			$k = j + 1$	
			$i = 1, j = [i + 1, m - 1],$	$y'_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{j,k}$
			$k = j - 1$	
			$i = 2, j = [i - 1, m - 2],$	$y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j, y'_{j,k}$
			$k = j + 1$	
			$i = 2, j = [i, m - 1],$	$y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{j,k}$
			$k = j - 1$	
	$y'_{i,j}$	y'_k	$i = [1, m - 2], j = i + 1,$	$y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_{m-1}, y'_k$
			$k = [3,4]$	
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$	$y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{m-1}, y'_k$
			$k = [3,4]$	
16.	y_i	$y_{j,k}$	$i = 1, j = [i, m - 2],$	$y_i, y'_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j, y'_{j,k}, y_{j,k}$
			$k = j + 1$	
			$i = 1, j = [i + 1, m - 1],$	$y_i, y'_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{j,k}, y_{j,k}$
			$k = j - 1$	
			$i = 2, j = [i - 1, m - 2],$	$y_i, y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j, y'_{j,k}, y_{j,k}$
			$k = j + 1$	
			$i = 2, j = [i, m - 1],$	$y_i, y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{j,k}, y_{j,k}$

No	u	v	Kondisi	Lintasan Pelangi
	$y_{i,j}$	y_k	$k = j - 1$ $i = [1, m - 2], j = i + 1,$ $k = [3,4]$	$y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_{m-1}, y'_k, y_k$
			$i = [2, m - 1], j = i - 1,$ $k = [3,4]$	$y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{m-1}, y'_k, y_k$
17.	y_i	$y'_{j,k}$	$i = 1, j = [i, m - 2], k = j + 1$ $i = 1, j = [i + 1, m - 1],$ $k = j - 1$	$y_i, y'_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j, y'_{j,k}$ $y_i, y'_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{j,k}$
			$i = 2, j = [i - 1, m - 2],$ $k = j + 1$	$y_i, y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j, y'_{j,k}$
	$y'_{i,j}$	y_k	$i = 2, j = [i, m - 1], k = j - 1$ $i = [1, m - 2], j = i + 1,$ $k = [3,4]$	$y_i, y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{j,k}$ $y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_{m-1}, y'_k, y_k$
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$ $k = [3,4]$	$y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{m-1}, y'_k, y_k$
18.	y'_i	$y_{j,k}$	$i = 1, j = [i, m - 2], k = j + 1$ $i = 1, j = [i + 1, m - 1],$ $k = j - 1$	$y'_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j, y'_{j,k}, y_{j,k}$ $y'_i, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{j,k}, y_{j,k}$
			$i = 2, j = [i - 1, m - 2],$ $k = j + 1$	$y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_j, y'_{j,k}, y_{j,k}$
	$y_{i,j}$	y'_k	$i = 2, j = [i, m - 1], k = j - 1$ $i = [1, m - 2], j = i + 1,$ $k = [3,4]$	$y'_i, x'_{i-1}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{j,k}, y_{j,k}$ $y_{i,j} y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_{m-1}, y'_k$
			$i = [2, m - 1], j = i - 1,$ $k = [3,4]$	$y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{m-1}, y'_k$
19.	$y'_{i,j}$	$y'_{k,l}$	$i = [1, m - 3], j = i + 1,$ $k = [i + 1, m - 2], l = k + 1$ $i = [1, m - 3], j = i + 1,$ $k = [i + 2, m - 1], l = k - 1$	$y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_k, y'_{k,l}$ $y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_l, y'_{k,l}$
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$ $k = [i, m - 2], l = k + 1$	$y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{k,l}$
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$ $k = [i + 1, m - 1], l = k - 1$	$y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_l, y'_{k,l}$
20.	$y_{i,j}$	$y_{k,l}$	$i = [1, m - 3], j = i + 1,$ $k = [i + 1, m - 2], l = k + 1$ $i = [1, m - 3], j = i + 1,$ $k = [i + 1, m - 1], l = k - 1$	$y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_k, y'_{k,l}, y_{k,l}$ $y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_l, y'_{k,l}, y_{k,l}$
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$ $k = [i, m - 2], l = k + 1$	$y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{k,l}, y_{k,l}$
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$ $k = [i + 1, m - 1], l = k - 1$	$y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_l, y'_{k,l}, y_{k,l}$
21.	$y_{i,j}$	$y'_{k,l}$	$i = [1, m - 3], j = i + 1,$ $k = [i + 1, m - 2], l = k + 1$ $i = [1, m - 2], j = i + 1,$ $k = [i + 1, m - 1], l = k - 1$	$y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_k, y'_{k,l}$ $y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_l, y'_{k,l}$
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$ $k = [i, m - 2], l = k + 1$	$y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{k,l}$
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$ $k = [i + 1, m - 1], l = k - 1$	$y_{i,j}, y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_l, y'_{k,l}$

No	u	v	Kondisi	Lintasan Pelangi
22.	$y'_{i,j}$	$y_{k,l}$	$i = [1, m - 3], j = i + 1,$ $k = [i + 1, m - 2], l = k + 1$	$y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_k, y'_{k,l}, y_{k,l}$
			$i = [1, m - 2], j = i + 1,$ $k = [i + 1, m - 1], l = k - 1$	$y'_{i,j}, x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_l, y'_{k,l}, y_{k,l}$
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$ $k = [i, m - 2], l = k + 1$	$y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k, y'_{k,l}, y_{k,l}$
			$i = [2, m - 2], j = i - 1,$ $k = [i + 1, m - 1], l = k - 1$	$y'_{i,j}, x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_l, y'_{k,l}, y_{k,l}$

Berdasarkan pewarnaan pelangi yang ditunjukkan pada Gambar 2 dan lintasan pelangi yang diuraikan pada Tabel 1, maka Teorema 2 yang menyatakan $rc(G) = 3m$ untuk $m \geq 2$ terbukti.

4. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, diperoleh sebuah teorema bilangan terhubung pelangi pada graf tengah $M(G)$ dari graf ulat $(C_{m,2})$ untuk $m \geq 2$ dengan m merupakan bilangan bulat dan $G \cong M(C_{m,2})$, maka $rc(M(C_{m,2})) = 3m$.

Referensi

- [1] M. Afifuddin and I. K. Budayasa, "Bilangan Keterhubungan Titik Pelangi Kuat Pada Graf," *MATHunesa J. Ilm. Mat.*, vol. 10, no. 1, pp. 33–40, 2022, doi: 10.26740/mathunesa.v10n1.p33-40.
- [2] Afriantini, Helmi, and F. Fran, "Pewarnaan Simpul, Sisi, Wilayah Pada Graf Dan Penerapannya," *Bimaster Ilmiah. Stat. dan Ter.*, vol. 8, no. 4, pp. 773–782, 2019, doi: 10.26418/bbimst.v8i4.36037.
- [3] D. J. Panjaitan and R. Aprilia, *Teori Graph*. Medan: LPPM UMNAW, 2022.
- [4] M. S. Prof. Dr. Hasmawati, *Pengantar dan jenis-jenis graf*. Unhas Press, 2020.
- [5] A. Darmawahyuni and Narwen, "Bilangan Kromatik Lokasi Dari Graf Ulat," *J. Mat. FMIPA UNAND*, vol. 7, no. 1, p. 43, 2016.
- [6] S. D. Sancoko, "Pelabelan Antiajaib Jarak Pada Beberapa Kelas Graf Terkait Graf Helm," *J. Ris. dan Apl. Mat.*, vol. 4, no. 2, p. 93, 2020, doi: 10.26740/jram.v4n2.p93-102.
- [7] N. Y. Sari, E. Noviani, and F. Fran, "Pelabelan Fibonacci Prima Ke-k Pada Graf H dan Graf Ulat H_n ," *KUBIK J. Publ. Ilm. Mat.*, vol. 8, no. 2, pp. 89–98, 2023, doi: 10.15575/kubik.v8i2.29290.
- [8] G. Chartrand *et al.*, "Rainbow connection in graphs," *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, 2008.
- [9] S. A. Farihati, A. N. M. Salman, and P. E. Putri, "Rainbow connection numbers of some classes of s-overlapping r-uniform hypertrees with size t," *AIMS Math.*, vol. 9, no. 7, pp. 18824–18840, 2024, doi: 10.3934/math.2024916.
- [10] D. Fitriani, A. N. M. Salman, and Z. Y. Awanis, "Rainbow connection number of comb product of graphs," *Electron. J. Graph Theory Appl.*, vol. 10, no. 2, pp. 461–473, 2022, doi: 10.5614/ejgta.2022.10.2.9.
- [11] Y. Joko, Helmi, and F. Fran, "Bilangan Terhubung Pelangi Pada Graf Planter Dan Graf Gurita," *Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, vol. 8, no. 1, pp. 29–34, 2019, doi: 10.26418/bbimst.v8i1.30508.
- [12] K. Q. Fredlina, A. N. M. Salman, I. G. P. K. Julihara, K. T. Werthi, and N. L. P. N. S. P. Astawa, "Rainbow Coloring of Three New Graph Classes," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1783, no. 1, 2021, doi: 10.1088/1742-6596/1783/1/012033.
- [13] C. A. P. Noor, L. Yahya, S. K. Nasib, and N. I. Yahya, "BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF SALJU," *J. Fundam. Math. Appl.*, vol. 4, no. 1, pp. 29–44, 2021, doi: 10.14710/jfma.v4i1.9035.
- [14] T. Hamada and I. Yoshimura, "Traversability and Connectivity of the Middle Graph of A

Graph,” vol. 1974, no. June, 1974.

- [15] A. Tamilselvi and M. Ponni, “Middle Graph of Semiring Valued Graphs,” *Turkish World Math. Soc. J. Appl. Eng. Math.*, vol. 13, no. 2, pp. 765–772, 2023.
- [16] K. S. Rao and R. Murali, “Rainbow Connection Number of Sunlet Graph and its Line , Middle and Total Graph,” *Int. J. Math. its Appl.*, vol. 3, no. 4, pp. 105–113, 2015.
- [17] Y. Zhao, S. Li, and S. Liu, “(Strong) Rainbow Connection Number of Line, Middle and Total Graph of Sunlet Graph,” *Proc. 2018 IEEE Int. Conf. Prog. Informatics Comput. PIC 2018*, pp. 175–179, 2018, doi: 10.1109/PIC.2018.8706299.
- [18] D. Rahmawati, F. Fran, Yudhi, and D. Krisantoni, “Total Rainbow Connection Number of n-Centipede Graph and Its Line, Square, and Middle Graph,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 040007, no. September, 2020.
- [19] T. Aruna and S. Jeyakokila, “Some results on Rainbow Connection Number of Graphs,” *Adv. Appl. Math. Sci.*, vol. 22, no. 8, pp. 1743–1753, 2023.