



## Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* dengan Struktur Usia dan Perilaku *Anti-Predator*

Ainun Sukmawati Al Idrus<sup>1\*</sup>, Ayub Prianto Abd. Gani<sup>2</sup>, Nurlaila Zaid<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Program Studi Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia

### Info Artikel

\*Penulis Korespondensi.

Email:

[ainunsukmawati14@gmail.com](mailto:ainunsukmawati14@gmail.com)

Submit: 23 Juli 2022

Direvisi: 13 Agustus 2022

Disetujui: 14 Agustus 2022



Under the licence  
CC BY-NC-SA 4.0

Diterbitkan oleh:



Copyright ©2022 by Author(s)

### Abstrak

Artikel ini membahas tentang model *Predator-prey* holling tipe II dengan melibatkan struktur usia dan perilaku *anti-predator*. Struktur usia diberikan pada populasi *predator* yang dibedakan menjadi dua, yaitu *predator* usia remaja dan *predator* usia dewasa, sementara pada populasi *prey* terdapat perilaku *anti-predator*, yaitu kecenderungan untuk bertahan terhadap serangan *predator*. Analisis model yang dilakukan meliputi penentuan titik tetap, analisis kestabilan titik tetap dan simulasi numerik. Diperoleh tiga titik tetap yaitu titik tetap kepunahan populasi ( $T_1$ ), titik tetap kepunahan *predator* ( $T_2$ ) dan titik tetap eksistensi populasi ( $T_3$ ). Analisis kestabilan menunjukkan bahwa  $T_1$  selalu bersifat sadel, sementara  $T_2$  dan  $T_3$  bersifat stabil bersyarat. Selanjutnya ditunjukkan bahwa  $T_3$  memiliki dua kondisi yang keduanya bersifat simpul stabil. Pada bagian akhir diberikan simulasi yang menunjukkan bahwa dinamika populasi yang terjadi sangat bergantung dari kondisi awal populasi dan nilai parameter perilaku *anti-predator* dari populasi *prey*.

**Kata Kunci:** Model *Predator-Prey*; Holling Tipe II; Struktur Usia; Perilaku *Anti-Predator*

### Abstract

This article discusses the *Predator-prey* Holling type II model involving age structure and *anti-predator* behaviour. The age structure is given to the predator population, which is divided into two, namely juvenile predators and adult predators, while in the prey population, there is *anti-predator* behaviour, namely the tendency to defend against predator attacks. The model analysis includes the determination of a fixed point, analysis of the stability of the fixed point and numerical simulation. Three fixed points were obtained, namely the fixed point of population extinction ( $T_1$ ), the fixed point of predator extinction ( $T_2$ ) and the fixed point of population existence ( $T_3$ ). Stability analysis shows that  $T_1$  is always a saddle, while  $T_2$  and  $T_3$  are conditionally stable. Furthermore, it is shown that  $T_3$  has two conditions which are both stable nodes. At the end, a simulation is given which shows that the population dynamics that occur are highly dependent on the initial conditions of the population and the value of the *anti-predator* behaviour parameter of the prey population.

**Keywords:** *Predator-Prey* Model; Holling II-Type; Age Structure; *Anti-Predator* Behaviour

## 1. Pendahuluan

Dinamika populasi merupakan salah satu cabang ilmu kehidupan dalam matematika ekologi yang mempelajari tentang interaksi antara mangsa (*prey*) dan pemangsa (*predator*) dalam suatu ekosistem. Pada tahun 1926, Lotka dan Volterra pertama kali memperkenalkan suatu model matematika sederhana yang membahas mengenai interaksi *predator-prey* yang dikenal dengan model Lotka-Volterra [1]. Model Lotka-Volterra dibentuk berdasarkan asumsi bahwa populasi *prey* dan populasi *predator* tumbuh secara eksponensial. Dikemudian hari, muncul asumsi baru untuk membuat model lebih realistis dengan mempertimbangkan populasi tumbuh secara logistik [2].

Dalam model Lotka-Volterra, proses predasi dinyatakan dalam fungsi respon *predator*. Fungsi respon pertama kali diperkenalkan oleh Holling dimana terdapat tiga tipe yaitu Holling Tipe I yang mengasumsikan bahwa *predator* memiliki karakteristik yang pasif dalam mencari mangsanya. Kemudian Holling Tipe II yang mengasumsikan bahwa *predator* aktif dalam mencari mangsanya. Terakhir, Holling Tipe III yang mengasumsikan bahwa *predator* akan mencari mangsa lain jika *prey* utamanya mengalami penurunan jumlah populasi [3].

Riset tentang interaksi dua populasi yang berkaitan dengan model Lotka-Volterra terus dilakukan dengan berbagai jenis modifikasi. Diantaranya adalah modifikasi model Lotka-Volterra dengan mempertimbangkan adanya struktur usia pada *predator* dan fungsi respon Monod-Haldane [4,5]. Beberapa penelitian tentang model *predator-prey* juga ditemukan dengan modifikasi model berupa perlakuan khusus pada salah satu populasi, seperti adanya perlakuan berupa pemberian racun pada *predator* [6] dan perlakuan berupa proteksi yang diberikan pada populasi *prey* [7]. Penelitian serupa yang dilakukan oleh Hasan, dkk [8] menggunakan perpaduan antara model *predator-prey* tipe Gause dan model penyebaran penyakit *Susceptible-Infected* (SI) serta fungsi respon Holling Tipe I. Penelitian lain yang dilakukan Maisaroh, dkk [9] melibatkan model *predator-prey* dengan infeksi pada populasi *prey* dan pemanenan secara proporsional pada populasi *predator*. Beberapa penelitian model *predator-prey* yang telah dilakukan ini menunjukkan berbagai modifikasi berupa perlakuan khusus pada kedua populasi maupun penggabungan antara model ekologi dan model epidemi. Hal ini menunjukkan bahwa kajian terkait model *predator-prey* sangat terbuka secara luas untuk terus dikembangkan dalam berbagai kasus.

Pada penelitian ini dilakukan konstruksi model yang melibatkan interaksi *predator-prey* yang mengacu pada model yang telah dilakukan sebelumnya pada [10] dengan melakukan modifikasi menggunakan fungsi respon Holling Tipe II. Modifikasi lain dilakukan dengan mempertimbangkan adanya struktur usia pada populasi *predator* yang merujuk pada [11] serta mempertimbangkan adanya perilaku anti-*predator* pada populasi *prey* yang mengacu pada [12]. Kajian terhadap model yang telah dikonstruksi dilakukan dengan menentukan titik tetap dan analisis stabilitasnya, serta pada bagian akhir diberikan simulasi numerik untuk menunjukkan dinamika populasi yang terjadi dari model tersebut.

## 2. Metode Penelitian

Pada bagian ini diberikan proses konstruksi model *predator-prey* Holling Tipe II dengan mempertimbangkan adanya struktur usia pada populasi *predator* dan mempertimbangkan perilaku anti-*predator* pada *prey*. Beberapa asumsi dipertimbangkan dalam konstruksi model antara lain:

1. Populasi *predator* terbagi atas dua yaitu *predator* remaja ( $y$ ) dan *predator* dewasa ( $z$ ).
2. Populasi *prey* ( $x$ ) tumbuh secara logistik dengan laju pertumbuhan intrinsik  $r$  dan daya dukung lingkungan  $K$  serta berkurang karena adanya interaksi dengan *predator* remaja mengikuti fungsi respon Holling Tipe II.
3. Populasi *predator* remaja diasumsikan berinteraksi dengan *prey* mengikuti fungsi respon Holling Tipe II.
4. Adanya pertumbuhan dari populasi *predator* remaja menjadi populasi *predator* dewasa sebesar  $d$ .
5. Adanya kematian alami pada populasi *predator* remaja dan *predator* dewasa sebesar  $m$ .
6. Adanya perilaku anti-*predator* pada populasi *prey* sebesar  $n$ .

Berdasarkan asumsi-asumsi diatas, dirumuskan model matematika berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axz}{z + cx} \\ \dot{y} &= \frac{bxz}{z + cx} - dy - m_1y \\ \dot{z} &= dz - m_2z - nxz \end{aligned} \tag{1}$$

dimana

- $\dot{x}$  = perubahan populasi *prey*
- $\dot{y}$  = perubahan populasi *predator* remaja
- $\dot{z}$  = perubahan populasi *predator* dewasa
- $r$  = laju pertumbuhan intrinsik populasi *prey*
- $K$  = daya dukung lingkungan
- $a$  = koefisien interaksi antara *prey* dan *predator* remaja yang berpengaruh terhadap laju pertumbuhan *prey*
- $b$  = koefisien interaksi antara *prey* dan *predator* remaja yang berpengaruh terhadap laju pertumbuhan *predator* remaja
- $c$  = tingkat kejenuhan *predator*
- $d$  = koefisien pertumbuhan dari populasi *predator* remaja menjadi populasi *predator* dewasa
- $m_1$  = laju kematian alami *predator* remaja
- $m_2$  = laju kematian alami *predator* dewasa
- $n$  = perilaku anti-*predator*.

Selanjutnya, model pada persamaan (1) ditransformasi ke bentuk yang lebih sederhana dengan memisalkan

$$x \rightarrow xK \quad y \rightarrow \frac{y}{d} \quad z \rightarrow cKz \quad t \rightarrow \frac{t}{r}$$

sehingga diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{\alpha xz}{x+z} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\beta xz}{x+z} - \gamma y - \delta_1 y \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma z - \delta_2 z - \eta xz \end{aligned} \quad (2)$$

dengan

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad \beta = \frac{dbK}{r} \quad \gamma = \frac{d}{r} \quad \delta_1 = \frac{m_1}{r} \quad \delta_2 = \frac{m_2}{r} \quad \eta = \frac{nK}{r}.$$

### 3. Hasil dan Pembahasan

#### 3.1 Penentuan Titik Tetap

Titik tetap model pada persamaan (2) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x(1-x) - \frac{\alpha xz}{x+z} &= 0 \\ \frac{\beta xz}{x+z} - \gamma y - \delta_1 y &= 0 \\ \gamma z - \delta_2 z - \eta xz &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (3) diperoleh 3 titik tetap, yaitu  $T_1(0,0,0)$ ,  $T_2(1,0,0)$  dan  $T_3(x^*, y^*, z^*)$ , dengan:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{\gamma - \delta_2}{\eta} \\ y^* &= \frac{\beta(\eta - \gamma + \delta_2)(\gamma - \delta_2)}{\alpha\eta^2(\gamma + \delta_1)} \end{aligned}$$

$$z^* = \frac{(\eta - \gamma + \delta_2)(\gamma - \delta_2)}{\eta(\alpha\eta - \eta + \gamma - \delta_2)}$$

### 3.2 Kestabilan Titik Tetap

Analisis kestabilan titik tetap diawali dengan menentukan matriks jacobian dari model pada persamaan (2) sebagai berikut:

$$J_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \frac{\alpha z}{x+z} + \frac{\alpha x z}{(x+z)^2} & 0 & -\frac{\alpha x}{x+z} + \frac{\alpha x z}{(x+z)^2} \\ \frac{\beta z}{x+z} - \frac{\beta x z}{(x+z)^2} & -\gamma - \delta_1 & \frac{\beta x}{x+z} - \frac{\beta x z}{(x+z)^2} \\ -\eta z & 0 & \gamma - \eta x - \delta_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Selanjutnya, sifat stabilitas ketiga titik tetap dinyatakan dalam lemma berikut.

**Lemma 1.** Titik tetap kepunahan populasi ( $T_1$ ) dari model pada persamaan (2) selalu bersifat sadel (tidak stabil).

**Bukti.** Jika titik tetap kepunahan populasi  $T_1(0,0,0)$  disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi ( $J_{(x,y,z)}$ ) pada persamaan (4), maka diperoleh:

$$J_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \delta_2 \end{pmatrix}$$

Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik  $\det(J_{(0,0,0)} - \lambda I) = 0$ , diperoleh nilai eigen untuk matriks  $J_{(0,0,0)}$ , yaitu:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\gamma - \delta_1, \quad \lambda_3 = \gamma - \delta_2$$

Karena parameter  $\gamma, \delta_1, \delta_2 > 0$ , maka  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  dan  $\lambda_3 > 0$ . Karena nilai-nilai eigen yang diperoleh berbeda tanda, maka titik tetap kepunahan populasi  $T_1(0,0,0)$  bersifat tidak stabil (sadel). ■

**Lemma 2.** Titik tetap kepunahan populasi *predator* ( $T_2$ ) dari model pada Persamaan (2) bersifat stabil jika memenuhi syarat  $\gamma < \eta + \delta_2$ .

**Bukti.** Jika titik tetap kepunahan populasi *predator*  $T_2(1,0,0)$  disubstitusikan ke matriks Jacobi ( $J_{(x,y,z)}$ ) pada persamaan (4), maka diperoleh:

$$J_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \eta - \delta_2 \end{pmatrix}$$

Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik  $\det(J_{(1,0,0)} - \lambda I) = 0$ , diperoleh nilai eigen untuk matriks  $J_{(1,0,0)}$ , yaitu:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -\gamma - \delta_1, \quad \lambda_3 = \gamma - \eta - \delta_2$$

Karena parameter  $\gamma, \delta_1 > 0$ , maka  $\lambda_1 < 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ . Selanjutnya  $\lambda_3 < 0$  dapat diperoleh jika dan hanya jika berlaku  $\gamma < \eta + \delta_2$ . Dengan demikian, titik tetap kepunahan populasi *predator* ( $T_2$ ) bersifat stabil bersyarat. ■

**Lemma 3.** Titik tetap eksistensi populasi ( $T_3$ ) dari model pada Persamaan (2) bersifat stabil jika memenuhi syarat:

$$\alpha < \frac{\gamma^2 - 2\gamma\eta + \eta^2 - 2\gamma\delta_2 + 2\delta_2\eta + \delta_2^2}{\eta^2 - 2\gamma\eta + 2\delta_2\eta}.$$

**Bukti.** Jika titik tetap eksistensi populasi  $T_3(x^*, y^*, z^*)$  disubstitusikan ke matriks Jacobi ( $J_{(x,y,z)}$ ) pada persamaan (2), maka diperoleh:

$$J_{(x^*, y^*, z^*)} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & 0 & M_{33} \end{pmatrix}$$

dimana

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{\alpha\eta^2 - 2\alpha\gamma\eta + 2\alpha\delta_2\eta - (\eta - \gamma + \delta_2)^2}{\alpha\eta^2} \\ M_{13} &= -\frac{(\alpha\eta - \eta + \gamma - \delta_2)^2}{\alpha\eta^2} \\ M_{21} &= \frac{\beta(\eta - \gamma + \delta_2)^2}{\alpha^2\eta^2} \\ M_{22} &= -\gamma - \delta_1 \\ M_{23} &= \frac{\beta(\alpha\eta - \eta + \gamma - \delta_2)^2}{\alpha^2\eta^2} \\ M_{31} &= -\frac{(\eta - \gamma + \delta_2)(\gamma - \delta_2)}{(\alpha\eta - \eta + \gamma - \delta_2)} \\ M_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik  $\det(J_{(x^*, y^*, z^*)} - \lambda I) = 0$ , diperoleh nilai eigen untuk matriks  $J_{(x^*, y^*, z^*)}$ , yang mengacu pada persamaan berikut:

$$(\lambda_1 + M_{22})((\lambda_2 - M_{33})(\lambda_2 - M_{11}) + M_{13}M_{31}) = 0 \quad (5)$$

Selanjutnya dari persamaan (5) dapat diperoleh 3 nilai eigen, yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma - \delta_1 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha\eta^2} (A \pm \sqrt{B}) \end{aligned}$$

dimana

$$A = -\gamma^2 + 2\gamma\eta - 2\alpha\gamma\eta - \eta^2 + \alpha\eta^2 + 2\gamma\delta_2 - 2\delta_2\eta + 2\alpha\delta_2\eta - \delta_2^2$$

dan

$$\begin{aligned} B &= (\gamma^2 - 2\gamma\eta + 2\alpha\gamma\eta + \eta^2 - \alpha\eta^2 - 2\gamma\rho + 2\eta\rho - 2\alpha\eta\rho + \rho^2)^2 \\ &\quad - 4\alpha\eta^2(\gamma^3 - 2\gamma^2\eta + \alpha\gamma^2\eta + \gamma\eta^2 - \alpha\gamma\eta^2 - 3\gamma^2\delta_2 + 4\gamma\delta_2\eta - 2\alpha\gamma\delta_2\eta - \delta_2\eta^2 + \alpha\delta_2\eta^2 \\ &\quad + 3\gamma\delta_2^2 - 2\delta_2^2\eta + \alpha\delta_2^2\eta - \delta_2^3). \end{aligned}$$

Karena parameter  $\gamma, \delta_1 > 0$ , maka  $\lambda_1 < 0$ . Selanjutnya, nilai dari  $\lambda_{2,3} < 0$  dapat dikonfirmasi jika memenuhi syarat  $A < 0$ ,

$$\begin{aligned}
-\gamma^2 + 2\gamma\eta - 2\alpha\gamma\eta - \eta^2 + \alpha\eta^2 + 2\gamma\delta_2 - 2\delta_2\eta + 2\alpha\delta_2\eta - \delta_2^2 &< 0 \\
\alpha\eta^2 + 2\alpha\delta_2\eta - 2\alpha\gamma\eta &< \gamma^2 - 2\gamma\eta + \eta^2 - 2\gamma\delta_2 + 2\delta_2\eta + \delta_2^2 \\
\alpha(\eta^2 + 2\delta_2\eta - 2\gamma\eta) &< \gamma^2 - 2\gamma\eta + \eta^2 - 2\gamma\delta_2 + 2\delta_2\eta + \delta_2^2 \\
\alpha &< \frac{\gamma^2 - 2\gamma\eta + \eta^2 - 2\gamma\delta_2 + 2\delta_2\eta + \delta_2^2}{\eta^2 + 2\delta_2\eta - 2\gamma\eta}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, titik tetap eksistensi populasi ( $T_3$ ) dapat mencapai kondisi stabil jika memenuhi syarat yang diberikan. ■

### 3.3 Simulasi Numerik

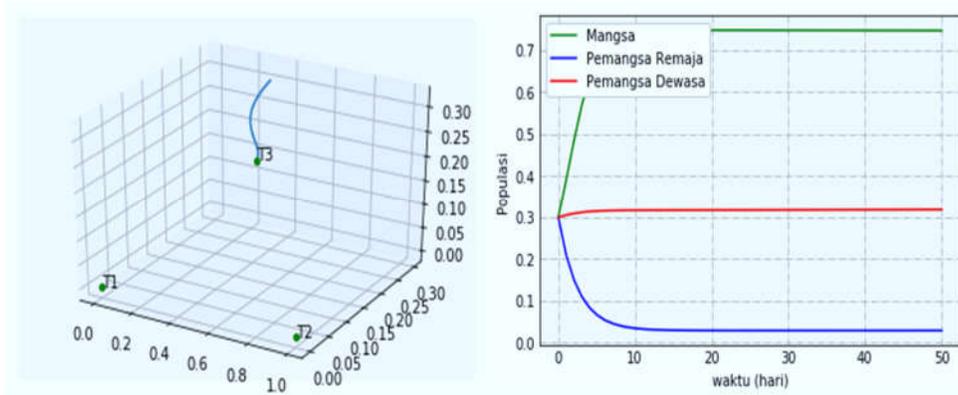
Dinamika populasi *predator-prey* dapat ditunjukkan melalui kurva bidang fase dan bidang solusi yang menggambarkan dinamika populasi *prey* dan *predator* pada kurun waktu tertentu. Dengan ini, masing-masing variabel dan parameter membutuhkan suatu nilai awal untuk proses komputasi. Proses komputasi pada simulasi ini, dilakukan dengan bantuan *Software Komputer Open Source Python 3.8*. Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini dapat dilihat pada Tabel 1.

**Tabel 1.** Pemilihan nilai parameter

Kasus	Nilai Parameter					
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\eta$
1	0.85	0.05	0.06	0.32	0.03	0.04
2	0.85	0.05	0.06	0.32	0.03	0.10

#### 3.3.1 Dinamika Populasi *Predator-Prey* Kasus 1

Parameter kontrol yang digunakan yaitu  $\eta = 0.04$ , serta nilai awal  $x(0) = 0.3$ ,  $y(0) = 0.3$  dan  $z(0) = 0.3$ . Titik tetap eksistensi populasi ( $T_3$ ) yang diperoleh pada kasus ini yaitu  $T_3 = (0.75; 0.0290248; 0.3125)$ . Nilai eigen yang diperoleh adalah  $\lambda_1 = -0.38$ ,  $\lambda_2 = -0.582616$  dan  $\lambda_3 = -0.00938432$ , sehingga titik tetap  $T_3$  bersifat simpul stabil. Ilustrasi kestabilan titik tetap dan dinamika populasi diberikan pada Gambar 1.

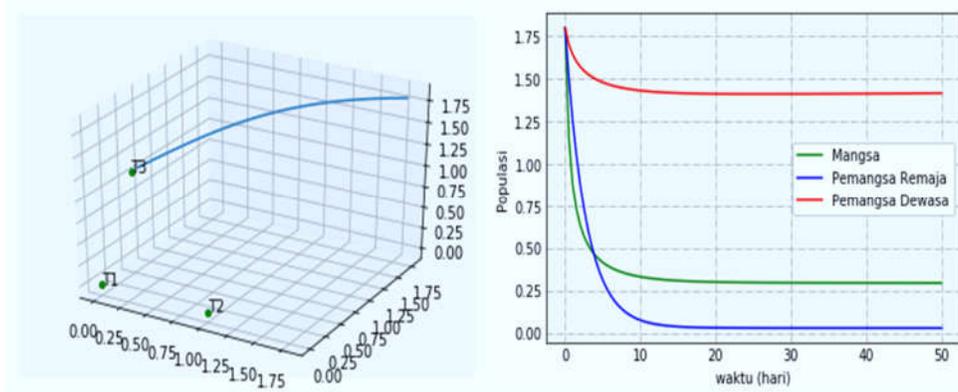


**Gambar 1.** (a) Bidang Fase dan (b) Bidang Solusi Kasus 1

Gambar 1(a) menunjukkan ilustrasi bahwa titik tetap  $T_3$  bersifat stabil. Pada Gambar 1(b), ditunjukkan dinamika populasi yang terjadi bahwa populasi *prey* bergerak mengalami peningkatan yang cukup signifikan sementara populasi *predator* dewasa mengalami sedikit peningkatan jumlah populasi. Adapun populasi *predator* remaja mengalami penurunan yang cukup signifikan mengakibatkan populasi tersebut hampir mengalami kepunahan. Hal tersebut disebabkan karena adanya perilaku anti-*predator* pada populasi *prey* sehingga *predator* remaja diasumsikan belum memiliki cukup kemampuan untuk bertahan sebagaimana halnya yang dilakukan oleh *predator* dewasa. Meskipun demikian, pada akhirnya ketiga populasi mulai stabil terlihat bergerak monoton pada titik eksis.

### 3.3.2 Dinamika Populasi *Predator-Prey* Kasus 2

Pada kasus kedua, parameter kontrol yang digunakan yaitu  $\eta = 0.1$ , serta nilai awal  $x(0) = 1.8$ ,  $y(0) = 1.8$  dan  $z(0) = 1.8$ . Pada kondisi ini, diperoleh titik tetap eksistensi populasi ( $T_3$ ) yaitu  $T_3 = (0.3; 0.0325077; 1.4)$ . Nilai eigen yang diperoleh adalah  $\lambda_1 = -0.38$ ,  $\lambda_2 = -0.195433$  dan  $\lambda_3 = -0.0243637$  yang juga menunjukkan bahwa titik tetap  $T_3$  bersifat simpul stabil. Ilustrasi kestabilan titik tetap dan dinamika populasi diberikan pada Gambar 2.



**Gambar 2.** (a) Bidang Fase dan (b) Bidang Solusi Kasus 2

Gambar 2(a) menunjukkan ilustrasi titik tetap eksistensi populasi  $T_3$  yang bersifat simpul stabil. Selanjutnya pada Gambar 2(b) ditunjukkan dinamika yang terjadi pada ketiga populasi dari titik awal menuju titik eksis. Dapat dilihat dimanika yang terjadi pada Gambar bahwa ketiga populasi mengalami penurunan dengan signifikansi yang berbeda satu sama lain. Dalam hal ini, populasi *predator* remaja yang mengalami penurunan yang paling signifikan dan hampir mengalami kepunahan, disusul dengan populasi *prey*. Populasi *predator* dewasa dalam hal ini juga mengalami penurunan namun tidak beigtu signifikan. Dinamika populasi yang terjadi menunjukkan adanya pengaruh yang signifikan dari kondisi awal ketiga populasi dan nilai parameter anti-*predator* terhadap dinamika yang terjadi pada ketiga populasi. Meskipun demikian, ketiga populasi dapat mencapai keseimbangan dalam kurun waktu yang relatif singkat dan bertahan pada titik eksistensi populasi.

## 4. Kesimpulan

Model *predator-prey* yang melibatkan struktur usia pada populasi *predator* serta adanya perilaku anti-*predator* memiliki tiga titik tetap, yaitu titik tetap kepunahan populasi ( $T_1$ ), titik tetap kepunahan populasi *predator* ( $T_2$ ) dan titik tetap eksistensi populasi ( $T_3$ ). Titik tetap  $T_1$  selalu bersifat sadel (tidak stabil), sedangkan titik tetap  $T_2$  bersifat stabil bersyarat bergantung pada nilai parameter yang dipilih dan memenuhi syarat  $\gamma < \eta + \delta_2$ . Adapun titik tetap  $T_3$  mencapai kondisi stabil jika memenuhi syarat  $\alpha < \frac{\gamma^2 - 2\gamma\eta + \eta^2 - 2\gamma\delta_2 + 2\delta_2\eta + \delta_2^2}{\eta^2 - 2\gamma\eta + 2\delta_2\eta}$ .

Dinamika populasi *predator-prey* model ini terbagi atas 2 kasus, dimana parameter  $\eta$  merupakan parameter kontrol pada sistem yang nilainya tidak selalu tetap. Pada kasus 1, titik tetap eksistensi populasi ( $T_3$ ) bersifat simpul stabil dengan nilai parameter kontrol  $\eta = 0.04$ , sedangkan pada kasus 2, titik tetap  $T_3$  bersifat simpul stabil dengan nilai parameter kontrol  $\eta = 0.1$ . Kedua kasus ini menunjukkan kondisi dimana populasi *predator* remaja hampir mengalami kepunahan yang disebabkan oleh adanya perilaku anti-*predator* dan sifat defending dari *prey*. Dinamika populasi juga terlihat sangat bergantung dari nilai awal yang diberikan, sesuai dengan hasil analisis titik tetap yang bersifat stabil sesuai dengan syarat parameter yang diberikan.

## Referensi

- [1] J. D. Murray, *Mathematical Biology: An Introduction*, 3rd Edition. New York(US): Springer-

- Verlaag, 2002.
- [2] J. W. Cain and A. M. Reynold, *Ordinary and Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical System. Virginia(US): Center For Teaching Excellence*, 2010.
  - [3] G. T. Skalski and J. F. Gilliam, “Functional Respon with Predator Interference: Viable Alternatives to the Holling Type II Model”, *Ecology*, vol. 82, pp. 3083–3092, 2001.
  - [4] M. Diska, *Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa Dengan Struktur Usia Pemangsa dan Fungsi Respon Monod-Haldane*, [Skripsi]. Bogor(ID): Institut Pertanian Bogor, 2018.
  - [5] H. S. Panigoro, R. Resmawan, A. T. R. Sidik, N. Walangadi, A. Ismail, and C. Husuna, “A Fractional-Order *Predator-rey* Model with Age Structure on Predator and Nonlinear Harvesting on Prey,” *Jambura J. Math.*, vol. 4, no. 2, pp. 355–366, Jul. 2022, doi: 10.34312/jjom.v4i2.15220.
  - [6] S. H. Arsyad, R. Resmawan, and N. Achmad, “Analisis Model Predator-Prey Leslie-Gower dengan Pemberian Racun Pada Predator,” *J. Ris. dan Apl. Mat.*, vol. 4, no. 1, pp. 1–16, Apr. 2020, doi: 10.26740/jram.v4n1.p1-16.
  - [7] H. S. Panigoro, E. Rahmi, N. Achmad, S. L. Mahmud, R. Resmawan, and A. R. Nuha, “A discrete-time fractional-order Rosenzweig-Macarthur predator-prey model involving prey refuge,” *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, vol. 2021, no. 1925, 2021, doi: 10.28919/cmbn/6586.
  - [8] N. Hasan, Resmawan. R and E. Rahmi, “Analisis Kestabilan Model Eko-Epidemiologi dengan Pemanenan Konstan pada Predator”, *JMSK*, vol. 16, no. 2, pp. 121-142, 2020.
  - [9] S. Maisaroh, Resmawan, R and E. Rahmi, “Analisis Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan Infeksi Penyakit pada *Prey* dan Pemanenan Proporsional pada *Predator*”, *JJBM*, vol. 1, no. 1, pp. 8-15, 2020.
  - [10] M. B. Gaib and W. A. Ja’a, “Analisis Kestabilan Model Interaksi Predator-Prey Dengan Fungsi Respon Monod-Haldane Dan Perilaku Anti Pemangsa,” *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 8, no. 2, pp. 51–59, Dec. 2020, doi: 10.34312/euler.v8i2.10407.
  - [11] S. G. Mortoja, P. Panja, and S. K. Mondal, “Dynamics of a Predator-Prey Model with Stage-Structure on Both Species and Anti-Predator Behavior”, *Informatics in Medicine Unlocked*, vol. 10, pp. 50–57, 2018.
  - [12] I. Djakaria, M. B. Gaib, and R. Resmawan, “Analysis of The Rosenzweig-MacArthur Predator-Prey Model with Anti-Predator Behavior,” *CAUCHY*, vol. 6, no. 4, pp. 260–269, May 2021, doi: 10.18860/ca.v6i4.11472.